

SUR LES ESPACES TEST POUR LA MOYENNABILITÉ

YOUSEF AL-GADID, BRICE R. MBOMBO, AND VLADIMIR G. PESTOV

RÉSUMÉ. Nous observons qu'un groupe polonais G est moyennable si et seulement si toute action continue de G sur le cube de Hilbert possède une mesure de probabilité invariante. Cela généralise un résultat de Bogatyi et Fedorchuk. Nous démontrons également que les actions continues sur l'espace de Cantor permettent de tester la moyennabilité, la moyennabilité extrême des groupes polonais non archimédiens, et la moyennabilité à l'infini des groupes discrets dénombrables. Il en résulte que cette dernière propriété peut également être testée par les actions sur le cube de Hilbert. Ces résultats généralisent un critère de Giordano et de la Harpe.

Abstract : We observe that a Polish group G is amenable if and only if every continuous action of G on the Hilbert cube admits an invariant probability measure. This generalizes a result of Bogatyi and Fedorchuk. We also show that actions on the Cantor space can be used to detect amenability and extreme amenability of Polish nonarchimedean groups as well as amenability at infinity of discrete countable groups. As corollary, the latter property can also be tested by actions on the Hilbert cube. These results generalise a criterion due to Giordano and de la Harpe.

1. INTRODUCTION

Un groupe topologique G est dit *moyennable* si toute action continue de G sur un espace compact X possède une mesure de probabilité borélienne invariante. En réponse à une question de Grigorchuk, Giordano et de la Harpe [13] ont montré qu'un groupe discret dénombrable G est moyennable si et seulement si toute action continue de G sur l'ensemble de Cantor $D^{\mathbb{N}_0}$ possède une mesure de probabilité invariante. On peut dire que l'ensemble de Cantor est un *espace test* pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables. Dans le même sens, Bogatyi et Fedorchuk [4] ont répondu à une question de [13] et démontré que le cube de Hilbert $I^{\mathbb{N}_0}$ est également un *espace test* pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables.

Dans cet article, nous démontrons que le cube de Hilbert reste un espace test pour la moyennabilité de tous les groupes polonais. Nous démontrons également que le résultat de Giordano et de la Harpe reste vrai pour les groupes polonais non archimédiens.

Un groupe topologique G est dit *extrêmement moyennable* si toute action continue de G sur un espace compact possède un point fixe. Nous démontrons que l'ensemble de Cantor est un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais non archimédiens. La

question d'existence d'un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais reste ouverte, car le cube de Hilbert ne possède pas cette propriété.

Si un groupe discret dénombrable G opère par homéomorphismes sur un espace compact X , alors l'action de G sur X est *moyennable* s'il existe une suite $b^n : X \rightarrow \mathcal{P}(G)$ d'applications continues tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$ pour tout $g \in G$, où $\mathcal{P}(G)$ désigne l'espace des mesures de probabilité sur G , muni de la topologie vague. Un groupe discret dénombrable G est dit *moyennable à l'infini* [18],[1], ou *topologiquement moyennable*, s'il existe un espace compact X et une action par homéomorphismes de G sur X qui est moyennable. Les exemples des groupes moyennables à l'infini comprennent les groupes moyennables, les groupes classiques sur les corps, les groupes d'automorphismes d'arbres enracinés réguliers, les groupes hyperboliques (en particulier, les groupes libres). Voir [1] et [8], Ch. 5.

Par analogie avec le résultat de Giordano et de la Harpe, nous démontrons qu'un groupe discret dénombrable G est moyennable à l'infini si et seulement si G possède une action moyennable sur l'ensemble de Cantor ou sur le cube de Hilbert. Autrement dit, l'ensemble de Cantor et le cube de Hilbert sont des espaces test pour la moyennabilité topologique des groupes discrets dénombrables.

2. DÉCOMPOSITION DU COMPACTIFIÉ DE SAMUEL $\mathcal{S}(G)$ EN LIMITE INVERSE

Dans cette section, nous rassemblons quelques résultats bien connus des spécialistes, mais donc les références sont souvent difficiles à retrouver.

Soit X un espace compact. On note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles et $C(X)'$ le dual topologique de $C(X)$. L'espace $\mathcal{P}(X)$ des mesures de probabilité sur X est un sous-espace compact de $C(X)'$ muni de la topologie vague. Si X est un G -espace compact, alors l'action continue de G sur X peut être prolongée à $\mathcal{P}(X)$ de manière évidente.

Soient G un groupe topologique et $E = RUCB(G)$ la C^* -algèbre commutative et unifère constituée des fonctions $x : G \rightarrow \mathbb{C}$ bornées et uniformément continues à droite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de e tel que $gh^{-1} \in V \Rightarrow |x(g) - x(h)| < \varepsilon$.

L'espace de Gelfand $\mathcal{S}(G)$ de E , c'est-à-dire l'espace de idéaux maximaux de E muni de sa topologie compacte usuelle, est un compactifié de G [7]. C'est le compactifié de Samuel [26] de G par rapport à la structure uniforme droite sur G . Dans la terminologie anglo-saxonne, on l'appelle "greatest ambit". Nous l'appellerons ici tout simplement compactifié de Samuel. Notons que, par le théorème de Gelfand, l'algèbre $C_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(G))$ est isomorphe à E .

Remarque 2.1. Si G est un groupe discret dénombrable, alors le compactifié de Samuel $\mathcal{S}(G)$ coïncide avec le compactifié de Stone-Čech βG .

Soient G un groupe topologique, Z un espace topologique, et $f : G \rightarrow Z$ une application uniformément continue à droite telle que $X := f(G)$ soit compact ; alors f se prolonge en une application $f : \mathcal{S}(G) \rightarrow X$, encore notée f . Définissons une relation d'équivalence sur

$\mathcal{S}(G)$ par :

$$x\mathcal{R}y \text{ si } f(gx) = f(gy) \text{ pour tout } g \in G.$$

Il est facile de vérifier que le graphe C de \mathcal{R} est fermé dans $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(G)$, de sorte que l'espace quotient $X_f := \mathcal{S}(G)/\mathcal{R}$ est séparé. Puisque la surjection canonique $\pi_f : \mathcal{S}(G) \rightarrow X_f$ est continue, l'espace quotient X_f est compact. L'application $\bar{f} : X_f \ni [x] \mapsto f(x) \in X$ est continue, et $f = \bar{f} \circ \pi_f$.

Soit F une famille d'applications uniformément continues à droite de G dans un espace compact Y (vues comme applications $\mathcal{S}(G) \rightarrow Y$). Posons $X = Y^F$ et soit $f : \mathcal{S}(G) \rightarrow X$ le produit diagonal de la famille F . Notons $X_F = X_f$ dans ce cas-là, et $\pi_F : \mathcal{S}(G) \rightarrow X_F$ la surjection canonique. Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 2.2. *Si F sépare les points de $\mathcal{S}(G)$, c'est à dire si, pour tous $x, y \in \mathcal{S}(G)$ avec $x \neq y$, il existe $f \in F$ tel que $f(x) \neq f(y)$, alors π_F est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(G)$ sur X_F .*

Lemme 2.3. *Si $F \subseteq F'$, alors il existe une surjection continue et G -équivariante canonique $\pi_{F'}^{F'}$ de $X_{F'}$ sur X_F .*

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{S}(G)$. Pour tout $F \subseteq F'$, l'application

$$\pi_{F'}^{F'} : X_{F'} \ni [x]_{\mathcal{R}_{F'}} \mapsto [x]_{\mathcal{R}_F} \in X_F$$

est bien définie. De même, pour tout $F \subseteq F'$, on a : $\pi_F^{F'} \circ \pi_{F'} = \pi_F$. Donc $\pi_F^{F'}$ est continue. G opère continûment sur X_F par l'action quotient $g[x]_{\mathcal{R}_F} = [gx]_{\mathcal{R}_F}$ et $\pi_F^{F'}$ est équivariante par rapport à cette action. \square

Théorème 2.4. *Soit F la famille des fonctions à valeurs complexes sur G qui sont uniformément continues et bornées. Alors X_F est l'espace de Gelfand de la C^* -algèbre engendrée par tous les translatés de F dans $RUCB(G) = C_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(G))$.*

Corollaire 2.5. *Supposons que G est dénombrable, X compact métrisable, et F dénombrable. Alors X_F est compact métrisable.*

Rappelons la notion de système projectif de G -espaces compacts, en suivant [6]. G étant un groupe topologique, un système projectif de G -espaces est la donnée d'un triplet (X_i, π_{ij}, I) où (I, \preceq) est un ensemble ordonné, $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille de G -espaces compacts et une famille d'applications équivariantes $\pi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$, pour $i \preceq j$ telle que π_{ii} est l'identité de X_i pour tout $i \in I$ et $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$ pour tout $i \preceq j \preceq k$. La limite projective $X = \varprojlim (X_i, \pi_{ij})$ du système projectif de G -espaces (X_i, π_{ij}, I) est le G -espace défini comme suit : si $\prod_{i \in I} X_i$ est l'espace produit des espaces $(X_i)_{i \in I}$ et $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ la projection sur le facteur X_i , alors

$$\begin{aligned} \varprojlim (X_i, \pi_{ij}) &= \{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i / x_i = \pi_{ij}(x_j) \text{ } i \preceq j\} \\ &= \{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i / pr_i(x) = \pi_{ij} \circ pr_j(x) \text{ } i \preceq j\}. \end{aligned}$$

C'est un sous-espace fermé, donc compact de $\prod_{i \in I} X_i$. Le groupe G opère continûment sur $\prod_{i \in I} X_i$ par $g.x = (g.x_i)$ où $x = (x_i)$. La restriction π_i de la projection pr_i à X est l'application canonique de X dans X_i , et $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$ pour tout $i \preceq j$. On écrit simplement $X = \varprojlim X_i$ si aucune confusion n'est possible.

On vérifie aisément le lemme :

Lemme 2.6. *Soit Φ une collection des familles des fonctions de $\mathcal{S}(G)$ dans X . Supposons que Φ est dirigée par inclusion (quels que soient $F, F' \in \Phi$, il existe $F'' \in \Phi$ tel que $F \subseteq F''$ et $F' \subseteq F''$). Alors le triplet $(X_F, \pi_F^{F'}, \Phi)$ est un système projectif de G -espaces.*

Remarque 2.7. Supposons que la réunion $\cup\{F : F \in \Phi\}$ sépare les points de $\mathcal{S}(G)$. Alors la limite projective du système $(X_F, \pi_F^{F'})$ est isomorphe, en tant que G -espace compact à $\mathcal{S}(G)$. En effet, considérons l'application $\Psi : \mathcal{S}(G) \ni x \mapsto (\pi_F(x))_{F \in \Phi} \in \varprojlim X_F$. Soit $x, y \in \mathcal{S}(G)$ tel que $x \neq y$. Puisque $\cup\{F : F \in \Phi\}$ sépare les points de $\mathcal{S}(G)$, il existe $F \in \Phi$ tel que $\pi_F(x) \neq \pi_F(y)$. Donc $\Psi(x) \neq \Psi(y)$ et Ψ est injective. L'application Ψ est surjective par définition, et équivariante.

Lemme 2.8. *Soient X et Y deux G -espaces compacts et soit $\alpha : X \rightarrow Y$ une application continue et équivariante. L'application $\alpha_* : \mathcal{P}(X) \ni \mu \mapsto \mu \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{P}(Y)$ est également continue et équivariante.*

Lemme 2.9. *S'il existe une mesure de probabilité invariante sur chaque G -espace dans un système inverse des G -espaces compacts, alors il existe une mesure de probabilité invariante sur la limite inverse correspondante.*

Démonstration. Soit $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$ un système projectif de G -espaces. Notons $X = \varprojlim X_\alpha$. Par le lemme 2.8, ce système projectif permet d'obtenir un système projectif $(\mathcal{P}(X_\alpha), (\pi_{\alpha\beta})_*, I)$. Il est clair que $\mathcal{P}(X) = \varprojlim \mathcal{P}(X_\alpha)$. Notons $\mathcal{P}_{inv}(X_\alpha)$ l'espace des mesures de probabilités invariantes sur X_α et considérons le sous-système $(\mathcal{P}_{inv}(X_\alpha), (\pi_{\alpha\beta})_*, I)$ de $(\mathcal{P}(X_\alpha), (\pi_{\alpha\beta})_*, I)$. On a également $\mathcal{P}_{inv}(X) = \varprojlim \mathcal{P}_{inv}(X_\alpha)$. Puisque $\mathcal{P}_{inv}(X_\alpha)$ est compact et non vide pour tout α , on a : $\mathcal{P}_{inv}(X) \neq \emptyset$. Si $\mu \in \mathcal{P}_{inv}(X)$, alors μ est une mesure de probabilité invariante sur X . \square

Lemme 2.10. *Soit G un sous-groupe dense de G' , et F une famille des fonctions de G dans un espace compact X . Alors on peut construire X_F à partir de G , notons-le $X_F(G)$, ainsi qu'à partir de G' , notons-le $X_F(G')$. Les G' -espaces $X_F(G)$ et $X_F(G')$ sont isomorphes entre eux de manière canonique.*

Lemme 2.11. *Si X est un compact de dimension zéro (au sens de Lebesgue), alors X_F est de dimension zéro.*

Remarque 2.12. Supposons que X_F contienne un point isolé x_0 ; notons $H = \{g \in G : gx_0 = x_0\}$ le stabilisateur correspondant, qui est un sous-groupe ouvert de G . Alors, pour

tout $f \in F$ la restriction $f|_{gH}$ est constante : Pour garantir la non-existence des points isolés, nous allons supposer que la famille F vérifie la condition (\star) suivante : Pour tout voisinage V de e , il existe $f \in F$ et $x \in V$ tel que $f(x) \neq f(e)$.

Dans ces conditions, on a le lemme :

Lemme 2.13. *G étant un groupe topologique, X un espace compact, et X_F défini comme précédemment avec F vérifiant la condition (\star) , alors ou bien X_F est fini, ou bien X_F ne contient aucun point isolé.*

Corollaire 2.14. *Si G est infini dénombrable, X compact de dimension zéro et F dénombrable et vérifie (\star) , alors X_F est homéomorphe à l'espace de Cantor.*

Définition 2.15. Un groupe topologique G est dit *non archimédien* s'il est séparé et possède une base de voisinages de l'élément neutre formé des sous-groupes ouverts.

L'ensemble des groupes polonais non archimédiens comprend :

- (1) le groupe symétrique infini S_∞ de toutes les bijections de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , muni de la topologie de la convergence simple,
- (2) le groupe $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$ des homéomorphismes de l'ensemble de Cantor muni de la topologie de la convergence uniforme,
- (3) les groupes localement compacts totalement discontinus (voir [6], chapitre III, section 4, no. 6).

Les groupes polonais non archimédiens jouent un rôle important en logique où ils sont les groupes des automorphismes des structures de Fraïssé [2].

Théorème 2.16. ([23]) *Un groupe topologique G est non archimédien si et seulement si les applications continues de $\mathcal{S}(G)$ dans $D = \{0, 1\}$ séparent les points de $\mathcal{S}(G)$.*

On déduit de tout ce qui précède le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.17. *Si G est non archimédien et polonais, alors $\mathcal{S}(G)$ se développe en limite projective d'un système des G -espaces compacts métrisables de dimension zéro. Si G est de plus infini, alors $\mathcal{S}(G)$ est la limite d'un tel système dont tous les G -espaces sont homéomorphes à l'espace de Cantor.*

3. ESPACES TEST POUR LA MOYENNABILITÉ

Définition 3.1. Pour une partie compacte $X \subset E$ d'un espace localement convexe E , on appelle *barycentre* d'une mesure $\mu \in \mathcal{P}(X)$ une forme linéaire $b(\mu) \in E''$, définie par l'égalité $b(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi|_X)$.

Remarque 3.2. Si X est un compact convexe de E , alors il existe un unique barycentre $b(\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}(X)$, et de plus $b(\mu) \in X$ (c.à.d. $b(\mu)$ est une mesure de Dirac) ; voir [5] Chapitre 4, § 7). Dans ce cas, l'application $b = b_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow X$ est bien définie, continue (voir [5] Chapitre 3, § 3) et évidemment affine.

Lemme 3.3. [4] *Si $X \subset E$ est convexe et le groupe G opère affinement sur X , alors l'application $b_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow X$ est équivariante par rapport à l'action de G sur $\mathcal{P}(X)$.*

Par conséquent, on a le résultat suivant [4] :

Théorème 3.4. *Pour une action affine d'un groupe topologique G sur un espace compact convexe, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *l'action possède un point fixe,*
- (2) *l'action possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Lemme 3.5. *Un groupe topologique G est moyennable si et seulement s'il existe une mesure de probabilité invariante sur son compactifié de Samuel $S(G)$.*

Lemme 3.6. ([19]) *Si G est un groupe polonais, alors il existe un système projectif de G -espaces compacts et métrisables $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$ tel que $S(G) = \varprojlim X_\alpha$.*

Le résultat suivant est bien connu au moins pour la classe des groupes discrets dénombrables. Nous rappelons l'argument quand même.

Proposition 3.7. *Un groupe polonais G est moyennable si et seulement si toute action continue de G sur un espace compact et métrisable, possède une mesure de probabilité invariante.*

Démonstration. La nécessité est évidente. Montrons la suffisance. Par le lemme 3.6, $S(G) = \varprojlim X_\alpha$. X_α étant un G -espace compact et métrisable pour tout α . Par hypothèse, il existe sur chaque G -espace compact métrisable X_α une mesure de probabilité invariante. Donc il existe une mesure de probabilité invariante sur $S(G)$ par le lemme 2.9 et G est moyennable. \square

Remarque 3.8. Évidemment, dans la démonstration de la proposition 3.7, on peut supposer sans perte de généralité que tous les G -espaces X sont infinis.

Théorème 3.9. *Un groupe polonais G est moyennable si et seulement si toute action continue de G sur le cube de Hilbert I^{\aleph_0} possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Démonstration. La nécessité est évidente. Montrons la suffisance. Soit X un G -espace compact et métrisable. Par la remarque 3.8, on peut supposer que X est infini. $\mathcal{P}(X)$ est donc un sous-espace compact métrisable de dimension infinie de $\mathbb{R}^{C(X)}$. Par le théorème de Keller (voir [3]), $\mathcal{P}(X)$ est homéomorphe au cube de Hilbert I^{\aleph_0} . Ainsi l'action de G sur $\mathcal{P}(X)$ possède une mesure de probabilité borélienne invariante. L'action de G sur $\mathcal{P}(X)$ étant affine, elle possède par le théorème 3.4 un point fixe $\mu \in \mathcal{P}(X)$, qui est une mesure de probabilité borélienne invariante pour l'action initiale de G sur X . \square

Remarque 3.10. L'idée d'utiliser le théorème de Keller dans le contexte dynamique appartient de toute évidence à Uspenskij, qui était le premier à l'employer dans [27].

Théorème 3.11. *L'ensemble de Cantor D^{\aleph_0} est un espace test pour la moyennabilité des groupes polonais non archimédiens. Autrement dit, un groupe polonais non archimédien G est moyennable si et seulement si toute action continue de G sur D^{\aleph_0} possède une mesure de probabilité invariante.*

Démonstration. La nécessité est évidente. Montrons la suffisance. G étant un groupe polonais non archimédien, il existe par le théorème 2.17, un système projectif de G -espaces $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$ avec $X_\alpha \cong D^{\aleph_0}$ pour tout $\alpha \in I$ tel que $\mathcal{S}(G) = \varprojlim X_\alpha$. Par hypothèse, il existe sur chaque G -espace X_α une mesure de probabilité invariante μ_α . Par le lemme 2.9, il existe une mesure de probabilité invariante μ sur $\mathcal{S}(G)$ et G est moyennable. \square

Remarque 3.12. Pour la théorie des groupes moyennables localement compacts, voir [24], [21], [4]. Pour celle des groupes moyennables non localement compact, voir [9].

4. SUR LES ESPACES TEST POUR LA MOYENNABILITÉ EXTRÊME

Définition 4.1. Un groupe topologique G est dit *extrêmement moyennable* si toute action continue de G sur un espace compact K possède un point fixe.

Des exemples des groupes extrêmement moyennables sont nombreux et ils comprennent :

- (1) Le groupe unitaire $\mathcal{U}(\ell^2)$, muni de la topologie forte (Gromov et Milman [15]).
- (2) Le groupe $\text{Aut}(X, \mu)$ des automorphismes mesurables préservant la mesure μ d'un espace borelien (X, μ) muni de la topologie faible (Giordano et Pestov [14]).
- (3) Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ des bijections de \mathbb{Q} dans lui-même qui préservent l'ordre muni de la topologie de la convergence simple (Pestov [23]).

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 4.2. *Un groupe topologique G est extrêmement moyennable si et seulement si l'action de G sur son compactifié de Samuel $\mathcal{S}(G)$ possède un point fixe.*

Théorème 4.3. *Un groupe polonais non archimédien G est extrêmement moyennable si et seulement si toute action continue de G sur l'ensemble de Cantor D^{\aleph_0} possède un point fixe.*

Démonstration. La nécessité est évidente. Montrons la suffisance. Montrons que l'action canonique de G sur $\mathcal{S}(G)$ possède un point fixe. Comme G est polonais et non archimédien, il existe par le théorème 2.17, un système projectif de G -espaces $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$ avec $X_\alpha \cong D^{\aleph_0}$ pour tout $\alpha \in I$ tel que $\mathcal{S}(G) = \varprojlim X_\alpha$. Par hypothèse, il existe sur chaque G -espace X_α un point fixe x_α . Notons π_α la restriction de la projection pr_α à $\mathcal{S}(G) = \varprojlim X_\alpha$ et posons $M_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$. Les applications π_α étant surjectives, on a $M_\alpha \neq \emptyset$ pour tout α . La famille $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ est centrée car $x = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in \bigcap_{i=1}^n M_{\alpha_i}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. L'espace $\mathcal{S}(G)$ étant compact, $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$. Tout point de $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$ est fixe pour l'action continue de G sur $\mathcal{S}(G)$. \square

Question 4.4. Existe-t-il un espace test pour les groupes polonais extrêmement moyennables ?

Le théorème du point fixe de Schauder affirme que toute fonction continue de I^{\aleph_0} dans I^{\aleph_0} possède un point fixe. En particulier, toute action continue du groupe discret \mathbb{Z} sur I^{\aleph_0} par homéomorphismes possède un point fixe. Ceci permet de conclure que le cube de Hilbert I^{\aleph_0} ne peut pas être un espace test pour la moyennabilité des groupes polonais. En effet, le théorème de Ellis [11] affirme que tout groupe discret agit librement sur un espace compact et par conséquent, n'est pas extrêmement moyennable.

On peut néanmoins observer qu'il existe un espace test compact séparable non nécessairement métrisable pour les groupes polonais extrêmement moyennables. En effet, notons par \mathcal{P}_0 l'ensemble de tous les groupes polonais non-extrêmement moyennables deux à deux non-isomorphes et choisissons pour tout $G \in \mathcal{P}_0$ un G -espace compact et métrisable X_G sans points fixes. L'espace $X = \prod_{G \in \mathcal{P}_0} X_G$ est un espace test séparable compact (non nécessairement métrisable) pour la moyennabilité extrême des groupes polonais.

Il est clair que l'action produit de G sur X est continue et sans points. Pour conclure, et grâce au célèbre théorème de Hewitt [16] et Pondiczery [25], il suffit de montrer que $|\mathcal{P}_0| \leq 2^{\aleph_0}$. Notons F_∞ le groupe libre avec un nombre infini dénombrable de générateurs. Notons \mathcal{P} l'ensemble des groupes polonais et \mathcal{D} l'ensemble de toutes les pseudo-métriques sur F_∞ . Il est clair que $|\mathcal{D}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}| = 2^{\aleph_0}$. Montrons que $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{D}|$.

Soit d une pseudo-métrique sur F_∞ invariante à gauche. $H_d = \{x \in F_\infty, d(x, e) = 0\}$ est un sous-groupe de F_∞ . La distance définie sur F_∞/H_d par $\hat{d}(xH_d, yH_d) = d(x, y)$ est invariante par translation à gauche. Notons G_d le complété de l'espace métrique $(F_\infty/H_d, \hat{d})$. Si H_d est un sous-groupe normale de F_∞ , le groupe topologique G_d est un groupe polonais et chaque groupe polonais est de la forme G_d . Notons par \mathcal{D}_N le sous-ensemble de \mathcal{D} constitué des pseudo-métriques d telles que H_d soit normale. Nous avons donc une application surjective : $\mathcal{D}_N \ni d \mapsto G_d \in \mathcal{P}$. Ainsi $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{D}_N| \leq |\mathcal{D}|$.

Rappelons qu'un groupe topologique G est dit *monothétique*, s'il existe un sous-groupe H de G qui est à la fois cyclique et dense, et *solénoïde*, s'il existe un homomorphisme continu f de \mathbb{R} dans G dont l'image est partout dense dans G .

Remarque 4.5. (1) Il est clair que tout groupe monothétique ou solénoïde est abélien, donc moyennable.

(2) Il est facile de déduire du théorème du point fixe de Schauder que toute action continue d'un groupe monothétique ou d'un groupe solénoïde sur le cube de Hilbert I^{\aleph_0} admet un point fixe.

Question 4.6. Toute action continue d'un groupe polonais moyennable sur le cube de Hilbert I^{\aleph_0} possède-t-elle un point fixe ? Même question pour un groupe moyennable discret.

5. ESPACES TEST POUR LA MOYENNABILITÉ À L'INFINI

Grâce à la condition de Reiter (P_1) [21], un groupe discret dénombrable G est moyennable si et seulement si l'action triviale de G sur $\{\star\}$ est moyennable. La moyennabilité à l'infini

est plus générale que la moyennabilité. En effet, le groupe libre à deux générateurs F_2 est moyennable à l'infini ([8], prop.5.1.8) mais n'est pas moyennable ([21], p. 6).

Le résultat suivant est bien connu de la théorie de la moyennabilité à l'infini.

Théorème 5.1. (Assertion 1 dans [10]) *Un groupe dénombrable G admet une action moyennable sur un espace compact et métrisable si et seulement si son action sur son compactifié de Stone-Čech βG est moyennable.*

Lemme 5.2. *Soit G un groupe dénombrable moyennable à l'infini. Notons (b_n) la suite des applications correspondantes de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{P}(G)$ et posons $F = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors l'action de G sur X_F est moyennable à l'infini.*

Démonstration. G étant moyennable à l'infini, il existe une suite d'applications continues $b^n : \mathcal{S}(G) = \beta G \rightarrow \mathcal{P}(G)$ telles que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \beta G} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$ pour tout $g \in G$. Pour tout $g \in G$, notons $\bar{g} : \beta G \ni x \mapsto gx \in \beta G$ l'homéomorphisme de βG sur lui même produit par g . Considérons le produit diagonal

$$f = \Delta_{(g,n) \in G \times \mathbb{N}}(b_n \circ \bar{g}) : \beta G \rightarrow (\mathcal{P}(G))^{G \times \mathbb{N}}$$

défini par $f(x) = (b_{gx}^n)_{(g,n) \in G \times \mathbb{N}}$. Il est clair que f est continue. La relation d'équivalence \mathcal{R}_F est définie sur βG par : $(x, y) \in \mathcal{R}_F \iff b_{gx}^n = b_{gy}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g \in G$. Notons encore par f l'application $f : \beta G \rightarrow f(\beta G)$, et par $\pi_F : \beta G \rightarrow \beta G / \mathcal{R}_F$ la surjection canonique. Il existe une application continue \bar{f} tel que : $f = \bar{f} \circ \pi_F$. Posons $X_F = \beta G / \mathcal{R}_F$. Considérons l'application $\tilde{b}^n : f(\beta G) \rightarrow \mathcal{P}(G)$ définie par $\tilde{b}^n = \pi_{e,n}$ où $\pi_{e,n}$ est la restriction de la projection à $f(\beta G)$. Ainsi, les applications $c^n : \tilde{b}^n \circ \bar{f} : X_F \rightarrow \mathcal{P}(G)$ sont continues.

Soit $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{[x] \in X_F} \|gc_{[x]}^n - c_{g[x]}^n\|_1 &= \sup_{[x] \in X_F} \|g(\tilde{b}^n \circ \bar{f})_{[x]} - (\tilde{b}^n \circ \bar{f})_{g[x]}\|_1 \\ &= \sup_{[x] \in X_F} \|g(\tilde{b}^n(\bar{f}([x]))) - \tilde{b}^n(\bar{f}(g[x]))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(\bar{f}([x]))) - \tilde{b}^n(\bar{f}(gx))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(f(x))) - \tilde{b}^n(f(gx))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(b_{hx}^n))_{(h,n) \in G \times \mathbb{N}} - \tilde{b}^n((b_{hgx}^n))_{(h,n) \in G \times \mathbb{N}}\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[x] \in X_F} \|gc_{[x]}^n - c_{g[x]}^n\|_1 = 0$. □

Théorème 5.3. *Un groupe discret dénombrable G est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur l'ensemble de Cantor D^{\aleph_0} .*

Démonstration. La suffisance est évidente. Montrons la nécessité. Si G possède une action moyennable sur son compactifié de Stone-Čech, alors il existe une suite d'applications $b^n :$

$\beta G \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ comme dans la définition de la moyennabilité à l'infini. Pour tout $g \in G$, notons $\bar{g} : \beta G \ni x \longmapsto gx \in \beta G$ l'homéomorphisme de βG sur lui-même. L'espace $b^n(\beta G)$ étant compact et métrisable, il existe une surjection continue $f^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow b^n(\beta G)$. Soit $g \in G$, alors $b_g^n \in b^n(\beta G)$. Puisque f^n est surjective, il existe $c_g \in D^{\aleph_0}$ tel que $f^n(c_g) = b_g^n$. On a ainsi une application $T^n : G \ni g \longmapsto c_g \in D^{\aleph_0}$. Cette application se prolonge de manière unique en une application continue $\beta T^n : \beta G \longmapsto D^{\aleph_0}$. Pour tout $g \in G$, on a : $(f^n \circ \beta T^n)(g) = f^n(\beta T^n(g)) = f^n(c_g) = b_g^n$. Ainsi, $f^n \circ \beta T^n = b^n$ sur G . Puisque G est dense dans βG , $f^n \circ \beta T^n = b^n$ sur βG . Posons : $c^n = \beta T^n \circ \bar{g} : \beta G \longrightarrow \{0, 1\}^{\aleph_0}$, $F = \{c^n : n \in \mathbb{N}\}$ et $X = D^{\aleph_0}$. Alors $X_F \cong D^{\aleph_0}$ et l'action de G sur X_F est moyennable à l'infini par le lemme 5.2. \square

Théorème 5.4. *Un groupe discret dénombrable G est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur le cube de Hilbert I^{\aleph_0} .*

Faisons d'abord les rappels suivants :

Lemme 5.5. (Lemme 3.6 dans [18]) *Un groupe discret dénombrable G est moyennable à l'infini si et seulement s'il existe une suite d'applications $b^n : G \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ tel que :*

- (1) *pour tout n , il existe $F_n \subset G$ fini tel que $\text{supp}(b_g^n) \subset F_n$ pour tout $g \in G$;*
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 = 0$ *pour tout $g \in G$.*

Lemme 5.6. *Soit G un groupe discret dénombrable. Si l'action de G sur l'ensemble de Cantor D^{\aleph_0} est moyennable à l'infini, alors les images des b^n sont finies.*

Démonstration. Soit $b^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ une suite d'applications comme dans la définition de la moyennabilité à l'infini. Puisque la dimension de Lebesgue de l'espace de Cantor D^{\aleph_0} est zéro, il existe une partition finie $\gamma = (A_i)_{i=1,2,\dots,n}$ de D^{\aleph_0} en sous-ensembles ouverts et fermés, telle que l'image par b^n de chaque élément de γ est contenue dans une des boules $B_{\frac{1}{n}}$ du rayon $1/n$ dans $\ell^1(G)$. Notons c_i les centres des boules correspondantes. Pour tout $A_i \in \gamma$, considérons l'application $(b^n)'$ définie par : $(b^n)'_x = c_i$ si $x \in A_i \in \gamma$. Soit $x \in D^{\aleph_0}$, il existe par définition de b^n et $(b^n)'$, une boule $B_{\frac{1}{n}}$ telle que :

$$\|b_x^n - (b^n)'_x\|_1 \leq \sup_{p,q \in B_{\frac{1}{n}}} \|p - q\|_1 = \text{diam}(B_{\frac{1}{n}}) = \frac{2}{n}.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D^{\aleph_0}} \|g(b^n)'_x - (b^n)'_{gx}\|_1 = 0$. \square

Démonstration du Théorème 5.4. La suffisance est évidente. Montrons la nécessité. Si G est un groupe discret et dénombrable admettant une action moyennable sur l'ensemble de Cantor, alors il existe une suite d'applications $b^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow \mathcal{P}(G)$ comme dans la définition de la moyennabilité à l'infini. Par le lemme 5.5, on peut supposer sans perte de généralité que pour tout n , il existe $F_n \subseteq G$ fini tel que $\text{supp}(b_x^n) \subset F_n$ pour tout $x \in D^{\aleph_0}$. Par le lemme

5.6, supposons que les images des b^n sont finies et notons $(c_i)_{i \in I=1,2,\dots,n}$ les images de toutes les applications b^n . Posons $A_i = (b^n)_{c_i}^{-1}$ et considérons

$$c^n : \mathcal{P}(D^{\aleph_0}) \ni \mu \longmapsto \sum_{i=1}^n \mu(A_i) c_i \in \mathcal{P}(G).$$

Les applications c^n sont clairement affines et continues par rapport à la topologie vague sur $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$. Ce sont précisément les prolongements affines des applications b^n sur $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$.

Notons \mathcal{P}_0 le sous-espace de $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$ formé des mesures à support fini. Soit $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \in \mathcal{P}_0$, on a : $c_\mu^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_{\delta_{x_i}}^n$. Or $c_{\delta_{x_i}}^n = \sum_{j=1}^n \delta_{x_i}(A_j) c_j = c_i = b_{x_i}^n$. D'où $c_\mu^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_{x_i}^n$. De même,

$$c_{g\mu}^n = \sum_i \alpha_i b_{gx_i}^n \text{ car } g\mu = g \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{gx_i}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 = \|\sum_i \alpha_i gb_{x_i}^n - \sum_i \alpha_i b_{gx_i}^n\|_1 \leq \sum_i \alpha_i \|gb_{x_i}^n - b_{gx_i}^n\|_1 \leq \sum_i \alpha_i \varepsilon = \varepsilon.$$

\mathcal{P}_0 étant dense dans $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$ et les applications c^n continues, on a : $\sup_{\mu \in \mathcal{P}(D^{\aleph_0})} \|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 < \varepsilon$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{P}(D^{\aleph_0})} \|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 = 0$.

On conclut que l'action de G sur $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$ est moyennable. Par le théorème de Keller, $\mathcal{P}(D^{\aleph_0})$ est homéomorphe à I^{\aleph_0} . \square

Remerciements. Les auteurs sont reconnaissants à Pierre de la Harpe pour ses nombreuses remarques utiles sur une version originale de cette note. Nous remercions le CRSNG Canada (V.G.P., B.R.M.), le MAÉCI canada (B.R.M), et le gouvernement de Libye (Y.A.-G.) pour leur support de ce projet de recherche.

RÉFÉRENCES

- [1] Anantharaman-Delaroche, *Amenability and exactness for dynamical systems and their C^* -algebras*, Trans. Amer. Soc. **10** (2002), 4153–4178.
- [2] H. Becker, A. S. Kechris, *The Descriptive Set theory of Polish Group Actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series 232, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [3] C. Bessaga and A. Pelczynski, *Selected Topics in Infinte-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa (1975).
- [4] S. Bogatyj and V.V. Fedorchuk, *Schauder's fixed point theorem and amenability of a group*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder center **29** (2007), 383–401.
- [5] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1963.
- [6] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques : Livre III, Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1958-1961.
- [7] R. B. Brook, *A construction of the greatest ambit*, Mathematical Systems Theory **4** (1970), 243–248.
- [8] N.P. Brown and N. Ozawa, *C^* -Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, Graduate Studies in Mathematics **88**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008.
- [9] P. de la Harpe, *Moyennabilité de quelques groupes topologiques de dimension infinie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **277** (1973), 1037–1040.

- [10] A. N. Dranishnikov, *On generalized amenability*, Preprint (1999).
- [11] R. Ellis, *Universal Minimal Sets*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **11** (1960), 540–543.
- [12] R. Engelking, *General Topology*, Publishers Warsaw, 2006.
- [13] T. Giordano and P. de la Harpe, *Moyennabilité des groupes dénombrables et actions sur les ensembles de Cantor*, C.R.Acad.Sci.Paris Sér. **324** (1997), 1255–1258.
- [14] T. Giordano and V.G. Pestov, *Some extremely amenable groups*, C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I **4** (2002), 273–278.
- [15] M. Gromov and V.D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, Amer. J. Math. **105**(1983), 843–854.
- [16] E. Hewitt, *A remark on density characters*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 641–643.
- [17] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [18] N. Higson and J. Roe, *Amenable groups actions and the Novikov conjecture*, J. reine angew. Math **519** (2000), 143–153.
- [19] A.S. Kechris, V.G. Pestov, S. Todorcevic, *Fraissé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups.*, GAFA, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 106–189.
- [20] N. Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **08** (2000), 691–695.
- [21] A.T. Paterson, *Amenability*, University Math. Surveys and Monographs 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [22] V.G. Pestov, *Dynamics of Infinite-dimensional Groups : The Ramsey-Dvoretzky-Milman phenomenon*, University Lecture Series, vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [23] V.G. Pestov, *On free actions, minimal flows, and a problem by Ellis*, Trans. of the American Mathematical Society **350** (1998), 4149–4165.
- [24] J-P. Pier, *Amenable Locally Compact groups*, New York, 1984.
- [25] E.S. Pondiczery, *Power problems in abstract spaces*, Duke Math. J. **11** (1944), 835–837.
- [26] P. Samuel, *Ultrafilters and compactification of uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 100–132.
- [27] V.V. Uspenskij, *A universal topological group with countable base*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 160–161.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, AL-FATEH UNIVERSITY, TRIPOLI-LYBIE.
E-mail address: yousef_algadid@yahoo.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES, UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I, BP 812
 YAOUNDÉ, CAMEROUN.
E-mail address: bricero@yahoo.fr

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES, UNIVERSITÉ D'OTTAWA, 585, AVE. KING ED-
 WARD, OTTAWA, ONTARIO, CANADA K1N 6N5.
E-mail address: vpest283@uottawa.ca